

# 生物資源の持続的利用における行動進化と罰金制度

## Behavioral Evolution and Penalty Schemes in the Sustainable Use of Biological Resources

大石 和博  
Oishi Kazuhiro

### 要約

本稿では、生物資源の持続的利用問題を evolutionary framework に基づいて考察する。利用者は二つの戦略、すなわち協力行動と非協力行動のいずれかを選択し、その割合は模倣学習に基づいて変化する。資源動学と両行動の進化を結合した動学体系の下で、罰金制度と規範費用を導入し、二つの戦略が長期的に共存する均衡の存在条件と安定性を分析する。さらに数値解析により、罰金強化は非協力行動を抑制し、資源水準を回復させる可能性があることを示す。

**Keywords** : Evolutionary framework; Replicator dynamics; Resource-stock dynamics

### 1. はじめに

再生可能資源の管理に関する理論分析は、従来、最適化行動を前提とする新古典派的枠組みによって展開され、研究が蓄積されてきた<sup>1</sup>。しかし、現実の資源利用主体が常に割引現在価値を最大化する計算を行っているとは限らない。限定合理性のもとで、相対的利得に基づき戦略を模倣・変更する進化的過程として理解する視点が、再生可能資源問題の分析において重要性を増している。

Sethi and Somanathan (1996) は、再生可能資源利用における社会規範の進化を分析するため、resource-stock dynamics と replicator dynamics を結合した動学体系を提示した。この evolutionary framework により、社会規範が協力行動の維持に果たす役割が理論的に示された。

Noailly *et al.* (2003) は、この evolutionary framework を発展させ、resource-stock dynamics と replicator dynamics を統合した二次元動学体系の性質を詳細に検討した。彼らの主要な結果は、一定の条件のもとで二つの戦略が長期的に共存しうることである。この共存均衡は、資源の存在量と戦略分布の内生的相互作用から生じるものであり、進化的資源管理研究における重要な成果といえる。

他方、近年の環境政策研究では、制度設計と遵守行動の共進化に注目が集まっている。Biancardi *et al.* (2025) は、監査体制と制裁措置を組み込んだ進化的数理モデルを提示し、企業の違反行動と政策運用が相互に影響を及ぼす構造を分析した。特に、総汚染量や違

反者の割合に応じて当局が監査頻度（監査確率）を調整する仕組みを導入することで、税や罰金等の政策手段が進化過程そのものを規定することを明らかにしている。

本稿は、これら三つの研究の流れを統合し、resource-stock dynamics と replicator dynamicsを結合した二次元動学体系の下で、非協力者の割合に応じて監査確率が変動する罰金制度と、資源水準に依存する規範費用を同時に導入する。これにより、協力者と非協力者が長期的に共存する均衡の存在条件と安定性を導出する。さらに、罰金水準の変化が共存均衡の位置および収束経路の性質にどのような影響を及ぼすかを明らかにする。

本稿の構成は以下の通りである。第2章では分析枠組みを提示し、第3章で長期均衡の存在条件を導出する。第4章では各均衡の local stability を検討し、第5章では罰金水準の比較静学を数値的に示す。第6章では結論を述べる。

## 2. 分析の枠組み

本稿では、生物資源をめぐって戦略的に行動する有限個の構成員からなる経済を考察する。そのために動学的観点から数理模型を構築する。時点  $t$  における生物資源の存在量を  $N \geq 0$  で表す<sup>2</sup>。再生可能資源である生物資源の時間的变化 ( $\dot{N} = dN/dt$ ) は、resource-stock dynamics によって記述される<sup>3</sup>。

まず、構成員による利用が存在しない場合、生物資源は自然成長に従って増加すると仮定する。この自然成長過程は logistic equation によって表され、つぎのように定式化される。

$$\dot{N} = rN \left( 1 - \frac{N}{k} \right)$$

ここで定数  $r > 0$  は生物資源のintrinsic growth rate, 定数  $k > 0$  は生物資源が到達しうる上限を示すcarrying capacityである。

つぎに、構成員による資源利用を導入する。構成員が資源を利用することにより、生物資源の存在量は減少する。時点  $t$  における構成員全体の利用量を  $H$  とすると、生物資源の時間的推移は、自然成長と資源利用行動の双方を考慮して、つぎのように修正される。

$$\dot{N} = rN \left( 1 - \frac{N}{k} \right) - H$$

この式は、生物資源が自然に回復する力と、人為的な利用によって減少する力との相互作用を同時に捉えた resource-stock dynamics を表している。以下では、このresource-stock dynamicsの下で、構成員が採用する戦略の分布がどのように変化し、その結果として生物資源の長期的な状態がどのように決定されるのかを分析する。

構成員の資源利用行動を、生物資源の存在量と構成員の獲得努力量に依存する形で定式化する<sup>4</sup>。Noailly *et al.* (2003) に従い、各構成員はあらかじめ与えられた二つの異な

る戦略  $i$  ( $i = 1, 2$ ) のいずれかを選択し、その戦略に対応する獲得努力量  $e_i$  を用いて生物資源を利用すると仮定する。獲得努力量は外生的に与えられ、一定であると仮定する。以下では、一般性を失うことなく、

$$e_1 > e_2 > 0$$

が成り立つとする。すなわち、戦略1は戦略2と比べてより多くの資源を利用する戦略であり、資源に対する負荷も相対的に大きい。

時点  $t$  において、戦略  $i$  を採用する構成員1人当たりの資源利用量  $h_i$  を  $h_i(N)$  と表す。本稿では、Noailly *et al.* (2003) と同様に、Schaefer 型の資源利用関数を仮定し、つぎのように定式化する。

$$h_i = h_i(N) = e_i N, \quad i = 1, 2$$

この定式化は、生物資源の存在量が多いほど、同一の獲得努力量の下でもより多くの資源を利用できることを表している。また、獲得努力量の違いは、利用技術、情報の利用方法、あるいは協調行動の有無など、構成員間の異質性を反映したものとして解釈できる。

つぎに、構成員全体の資源利用量を定義する。生物資源を利用する構成員の数を  $m > 0$  で表し、一定とする。そのうち戦略1を採用する構成員の割合を  $x \in [0, 1]$  と表すと、戦略2を採用する構成員の割合は  $1 - x$  となる。したがって、構成員全体の総利用量  $H$  は、

$$H(N, x) = mxh_1(N) + m(1-x)h_2(N) = mN[xe_1 + (1-x)e_2]$$

と表される。このように、総利用量は生物資源の存在量だけでなく、構成員がどの戦略を採用しているかという戦略分布にも依存する。したがって、構成員の行動選択の変化は、resource-stock dynamics を通じて、将来の生物資源の存在量に影響を及ぼすことになる。

以下では、表現を簡潔にするため、用語をつぎのように整理する。戦略1を選択する構成員は、相対的に高い獲得努力量を通じて生物資源を多く利用するため、非協力者とよぶことがある。一方、戦略2を選択する構成員は、利用を抑制する行動をとるため、協力者とよぶことがある。ただし、これらの呼称は分析上の便宜によるものであり、戦略の選択は道徳的判断ではなく、利得に基づく行動選択の結果として決定される。

つぎに、各構成員の利潤関数を定義する。分析の焦点を規範費用と罰金制度に置くため、生産技術および費用構造を単純化する。価格を  $p > 0$  とし、収入を  $ph_i(N)$  とする。また、獲得努力量1単位当たりの費用を  $c > 0$  とし、費用を  $ce_i$  とする。 $c$  と  $p$  は共に一定であると仮定する。利潤関数は

$$\pi_i = \pi_i(N) = e_i(pN - c), \quad i = 1, 2$$

と定義される。この利潤関数は、生物資源の存在量が多いほど収入が増加することを表している。以下では、生物資源が到達しうる上限  $k$  で利潤が正になるよう

$$pk > c$$

と仮定する。

本稿では、構成員の行動選択は利潤そのものではなく、規範的要因や制度的要因を考慮した利得に基づいて行われると考える。そこで、つぎに利得関数を定義する。まず、協力者（戦略2）については、追加的な負担や制裁は課されないものとし、協力者の利得  $u_2$  は利潤  $\pi_2$  と一致すると仮定する。協力者の利得関数は

$$u_2 = u_2(N) = \pi_2(N)$$

と定義される。一方、非協力者（戦略1）は、生物資源の過剰利用に対する社会的圧力や制度的制裁に直面すると仮定する。この影響を二つの要素によって表現する。第1に、生物資源の枯渇が進むほど、非協力的な利用行動に対する社会的圧力が高まると考え、規範費用を  $\phi(N)$  と表す。後の解析の簡潔さを考慮し、定数  $a > 0$  を用いて

$$\phi(N) = \frac{a}{N+1}$$

と定式化する。第2に、非協力者は、罰金制度の下で監査確率に応じて罰金を科されると仮定する。監査によって超過利用が発見された構成員は、確実に全額の罰金を支払うものとする。監査を受ける確率は非協力者の割合に依存し、 $\sigma(x)$  と表す。以下では、Biancardi *et al.* (2025) に従い、

$$\sigma(x) = x$$

と仮定する。また、 $F > 0$  を罰金の強度を表す定数とし、実際の罰金支払額は、非協力者による超過利用量  $(h_1 - h_2)$ 、すなわち  $\Delta e N$  に比例するものと仮定する。ここで、 $\Delta e = e_1 - e_2 > 0$  である。したがって、非協力者が負担する期待罰金は監査確率  $\sigma(x)$  と、監査された場合の罰金支払額  $F\Delta e N$  の積  $\sigma(x)F\Delta e N$  で与えられる。以上より、非協力者の利得関数は

$$u_1 = u_1(N, x) = \pi_1(N) - \phi(N) - \sigma(x)F\Delta e N$$

と定義される。このように、非協力者の利得  $u_1$  は、生物資源の存在量と戦略分布の双方に依存する。一方、協力者の利得  $u_2$  は生物資源の存在量だけに依存する。この利得構造の非対称性が<sup>4</sup>、replicator dynamics を通じて戦略分布の進化を導く。

構成員の戦略選択は、模倣学習を通じて変化すると仮定する。すなわち、各構成員は、他の構成員の行動や利得を観察し、平均利得を上回る戦略を模倣する傾向をもつ。構成員全体の平均利得  $\bar{u}$  は

$$\bar{u} = \bar{u}(N, x) = xu_1(N, x) + (1-x)u_2(N)$$

で与えられる。非協力者の割合  $x$  の時間的推移は、replicator dynamicsにより、非協力者の利得  $u_1$  と平均利得  $\bar{u}$  との差に比例して変化する。したがって、戦略分布の動学は次式のreplicator dynamics

$$\dot{x} = x(u_1 - \bar{u})$$

によって特徴付けられる<sup>5</sup>。この式は、平均利得を上回る戦略は、集団における構成員の割合を上昇させることを意味している。非協力者の利得が平均利得を上回る場合には非

協力者の割合  $x$  が上昇し、逆の場合には低下することが分かる。さらに、初期時点において  $x(0) = 1$  (すべての構成員が非協力者) または  $x(0) = 0$  (すべての構成員が協力者) である場合には、平均利得はそれぞれ  $\bar{u} = u_1$ ,  $\bar{u} = u_2$  となり、replicator dynamics から  $\dot{x} = 0$  が直ちに得られる。このとき、戦略分布は時間を通じて変化しない。しかしながら、本稿の関心は、戦略がどのように進化し、構成員間でどのような分布に収束するのかを分析する点にある。そのため、以下では Noailly *et al.* (2003) と同様に、初期分布が

$$0 < x(0) < 1$$

を満たす場合に限定して分析を行う。

上記のreplicator dynamicsを変形すると

$$\dot{x} = x(1-x)(u_1 - u_2)$$

を得る。変数の関係を明示するために

$$\dot{x} = x(1-x)(\pi_1(N) - \pi_2(N) - \phi(N) - \sigma(x)F\Delta eN)$$

と書き直しておこう。この式は、本稿における戦略分布の進化を記述する基本方程式である。右辺は、利潤差に基づく経済的要因に加え、生物資源の存在量に依存する規範費用と、戦略分布に依存する制度的制裁を同時に含んでいる点に特徴がある。

以上より、本稿の分析対象は、resource-stock dynamics と replicator dynamics からなる二次元の動学体系

$$\begin{cases} \dot{N} = rN\left(1 - \frac{N}{k}\right) - mN[xe_1 + (1-x)e_2] \\ \dot{x} = x(1-x)\left[\Delta e(pN - c) - \frac{a}{N+1} - xF\Delta eN\right] \end{cases} \quad (1)$$

によって定式化される。以下では、Noailly *et al.* (2003) による解法を用い、二次元力学系の定常状態の存在と安定性を分析し、非協力者と協力者が長期的にどのような割合で存続するのか、また生物資源の存在量がどのように決定されるのかを明らかにする。

### 3. 長期均衡点の存在

ここでは、二次元力学系 (1) について、その定常状態の存在を検討する。分析の方法は Noailly *et al.* (2003) に従う。定常状態は経済の長期均衡を表し

$$\dot{N} = 0, \quad \dot{x} = 0$$

を同時に満たす状態である。この状態を与える  $(N, x)$  を長期均衡点とよぶ。

まず、resource-stock dynamics に注目する。 $\dot{N} = 0$  となるのは、

$$N = 0, \quad x = \Phi(N) = \frac{1}{\Delta e} \left[ \frac{r}{m} \left( 1 - \frac{N}{k} \right) - e_2 \right]$$

の場合である。 $N = 0$  では経済活動が行われていないため、以下の分析ではこの状況を排除する。つぎに replicator dynamics に注目する。 $\dot{x} = 0$  となるのは、

$$x = 0, \quad x = 1, \quad x = \Psi(N) = \frac{pN - c}{FN} - \frac{a}{\Delta eFN(N+1)}$$

の場合である。以上から、横軸に資源の存在量  $N$ 、縦軸に非協力者の割合  $x$  をとる平面上で、つぎのような三つの長期均衡点が考えられる。

- ・ A均衡 ( $N_A, x_A$ ): すべての構成員が協力者である。
- ・ B均衡 ( $N_B, x_B$ ): 協力者と非協力者が長期的に共存する。
- ・ C均衡 ( $N_C, x_C$ ): すべての構成員が非協力者である。

これらの三つの均衡が存在するための条件を考えてみよう。A均衡ではすべての構成員が協力者であるから、 $x_A = 0$  である。このとき、

$$N_A = \frac{k}{r}(r - me_2)$$

である。C均衡では、すべての構成員が非協力者であるから、 $x_C = 1$  である。このとき、

$$N_C = \frac{k}{r}(r - me_1)$$

である。 $e_1 > e_2 > 0$  より、

$$N_A > N_C$$

が成り立つ。この関係から、非協力者の割合が高いほど、長期的には資源の存在量は減少するということが分かる。では、A均衡とC均衡が存在するための条件を見てみよう。

- ・ A均衡が存在するための必要条件は  $N_A > 0$ 、すなわち、 $r > me_2$  である。これは、すべての構成員が協力者である場合に、生物資源のintrinsic growth rateが総利用率を上回っていないなければならない、と解釈できる。 $r \leq me_2$  であれば、全ての均衡で資源は完全に枯渇する。
- ・ C均衡が存在するための必要条件は  $N_C > 0$ 、すなわち、 $r > me_1$  である。

以下では、A均衡およびC均衡において資源枯渇が生じない状況を考察するために、 $r > me_1$  が成り立つと仮定する。したがって、 $r > me_2$  が成り立ち、

$$N_A > N_C > 0$$

となる。

最後に、B均衡の存在条件を考えてみよう。B均衡は

$$x_B = \Phi(N_B), \quad x_B = \Psi(N_B)$$

を同時に満たす解 ( $N_B, x_B$ ) である。B均衡での資源枯渇の可能性を排除するためには、 $N_B > 0$  である必要がある。加えてB均衡では、協力者と非協力者が長期的に共存するから、

$$0 < x_B < 1$$

である必要がある。したがって、B均衡が存在するためには、つぎの三条件が同時に満たされなければならない。

- (i)  $r > me_1$  (A均衡とC均衡において資源枯渇が生じないこと)、

- (ii)  $\Phi(N)$  と  $\Psi(N)$  が  $N > 0$  の範囲で交点を持つこと,  
 (iii) その交点に対応する  $x_B$  が  $0 < x_B < 1$  を満たすこと。  
 つぎに, 均衡の一意性について考える。関数  $x = \Phi(N)$  は

$$\Phi'(N) = -\frac{r}{\Delta emk} < 0$$

より,  $N > 0$  で狭義単調減少関数である。また, 関数  $x = \Psi(N)$  は

$$\Psi'(N) = \frac{c}{FN^2} + \frac{a(2N+1)}{\Delta eFN^2(N+1)^2} > 0$$

より,  $N > 0$  で狭義単調増加関数である。よって, B 均衡 (内点解) が存在するなら, B 均衡は一意的に定まり,

$$N_A > N_B > N_C > 0$$

が成り立つ。

以上の議論より, 二次元力学系 (1) は, 三つの均衡を持つ可能性がある。もっとも, これらが経済の定常状態としてどのように観察されるかは, 各均衡の安定性に依存する。したがって, 次章では, 各均衡の local stability を分析し, 非協力者と協力者の共存が長期的に実現可能である条件を明らかにする。

#### 4. 長期均衡点の安定性

ここでは, 前章で導出された三つの長期均衡点

$$A = (N_A, 0), \quad B = (N_B, x_B), \quad C = (N_C, 1)$$

の local stability を検討する。二次元力学系は, 第2章の式 (1) で与えられる。Jacobian matrix

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial \dot{N}}{\partial N} & \frac{\partial \dot{N}}{\partial x} \\ \frac{\partial \dot{x}}{\partial N} & \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} \end{pmatrix}$$

により各長期均衡点の local stability を判定する。はじめに A 均衡から調べる。A 点で評価された Jacobian matrix  $J_A$  は

$$J_A = \begin{pmatrix} -\frac{r}{k}N_A & -\Delta emN_A \\ 0 & \Delta e(pN_A - c) - \frac{a}{N_A + 1} \end{pmatrix}$$

と表される。これは上三角行列であるから, 固有値  $\lambda_1^A, \lambda_2^A$  は対角成分に一致し,

$$\begin{aligned} \lambda_1^A &= -\frac{r}{k}N_A < 0 \\ \lambda_2^A &= \Delta eFN_A\Psi(N_A) > 0 \quad [ \because \Psi(N_A) > 0 ] \end{aligned}$$

である。したがって,  $\lambda_1^A\lambda_2^A < 0$  であるから, A 均衡は saddle point となる<sup>6</sup>。

つぎに、C均衡を調べる。C点で評価されたJacobian matrix  $J_C$  は

$$J_C = \begin{pmatrix} -\frac{r}{k}N_C & -\Delta emN_C \\ 0 & -\Delta e(pN_C - c) + \frac{a}{N_C + 1} + \Delta eFN_C \end{pmatrix}$$

と表される。これは上三角行列であるから、固有値  $\lambda_1^C, \lambda_2^C$  は対角成分に一致し、

$$\begin{aligned} \lambda_1^C &= -\frac{r}{k}N_C < 0 \\ \lambda_2^C &= \Delta eFN_C(1 - \Psi(N_C)) > 0 \quad [\because \Psi(N_C) < 1] \end{aligned}$$

である。したがって、 $\lambda_1^C \lambda_2^C < 0$  であるから、C均衡は saddle pointとなる。以上から、A均衡とC均衡の local stability をつぎのように特徴付けることができる。

Result1 A均衡とC均衡の local stability

A均衡とC均衡は saddle pointである。

最後に、B均衡を調べる。B均衡は

$$B = (N_B, x_B), \quad N_B > 0, \quad 0 < x_B < 1$$

であり、 $\Phi(N_B) = \Psi(N_B)$  を満たす内点解である。B点で評価されたJacobian matrix  $J_B$  は

$$J_B = \begin{pmatrix} -\frac{r}{k}N_B & -\Delta emN_B \\ x_B(1 - x_B)y_B & -x_B(1 - x_B)\Delta eFN_B \end{pmatrix}$$

と表される。ここで、 $y_B$  は

$$y_B = \Delta ep + \frac{a}{(N_B + 1)^2} - x_B \Delta eF$$

である。 $y_B$  の符号は

$$y_B = \Delta eFN_B \Psi'(N_B) > 0 \quad [\because \Psi'(N_B) > 0]$$

と定まる。

$J_B$  の trace と行列式をそれぞれ  $\text{tr}(J_B), \det(J_B)$  と表すと、

$$\begin{aligned} \text{tr}(J_B) &= -\frac{r}{k}N_B - x_B(1 - x_B)\Delta eFN_B < 0 \\ \det(J_B) &= x_B(1 - x_B)\Delta eN_B \left( \frac{r}{k}FN_B + my_B \right) > 0 \end{aligned}$$

となる。 $\text{tr}(J_B) < 0$  かつ  $\det(J_B) > 0$  であるから、B均衡は locally asymptotically stable である。さらに、stable node か stable focus かは判別式

$$D = [\text{tr}(J_B)]^2 - 4\det(J_B)$$

の符号で決まる。以上から、B均衡の local stability をつぎのように特徴付けることがで

きる。

Result2 B 均衡の local stability

B 均衡は locally asymptotically stable である。さらに、

- ・  $D > 0$  であれば、B 均衡は stable node である。
- ・  $D < 0$  であれば、B 均衡は stable focus である。

以上では、B 均衡の local stability を考察した。B 均衡は条件次第で locally asymptotically stable である可能性が示された。このとき、limit cycle が存在するか否かを調べよう。結果から見ていく。

Result3 limit cycle の可能性の排除

領域  $S = \{(N, x); N > 0, 0 < x < 1\}$  において、二次元力学系 (1) は limit cycle を持たない。

Proof: 平面上の simply connected open subset  $S$  上で定義された二次元力学系 (1) に Dulac's criterion を適用する。  $S$  上で定義された連続微分可能な実数値関数を  $G$  とする。 $S$  内で

$$\nabla \cdot (G\dot{N}, G\dot{x}) = \frac{\partial(G\dot{N})}{\partial N} + \frac{\partial(G\dot{x})}{\partial x}$$

が恒等的に zero でなく、その符号も変わらないことを示せばよい。ここで Dulac 関数として、

$$G(N, x) = \frac{1}{x(1-x)N}$$

を考える。

$$\frac{\partial(G\dot{N})}{\partial N} = -\frac{r}{kx(1-x)} < 0, \quad \frac{\partial(G\dot{x})}{\partial x} = -\Delta eF < 0$$

であるから、 $\nabla \cdot (G\dot{N}, G\dot{x}) < 0$  が  $S$  内で成立する。よって、Dulac's criterion より、 $S$  内に limit cycle は存在しない。■

## 5. 数値解析

本章では、第4章で導出した三つの均衡のうち、協力者と非協力者が共存する B 均衡に焦点を当て、罰金水準  $F$  の変化が均衡の位置および安定性にどのような影響を及ぼすかを数値的に検討する。A 均衡および C 均衡はそれぞれ協力者のみ、非協力者のみが存在する均衡であるのに対し、B 均衡は両者が正の水準で長期的に共存する均衡である。本稿の関心は、罰金制度の設計、とりわけ罰金水準の設定が、協力と非協力の共存構造をどのように変化させるかにある。そのため、本章では B 均衡を中心に分析を進める。

第4章で示したとおり、B均衡が存在する場合、B均衡はlocally asymptotically stableとなる。また、判別式 $D$ の符号によって、B均衡はstable nodeにもstable focusにもなりうる。すなわち、罰金水準の変化はB均衡の位置のみならず、収束の様態（単調収束か振動的収束か）にも影響を及ぼす可能性がある。

そこで本章では、まずB均衡がstable nodeとなるbase case 1を設定し、phase plane内に長期均衡点、解軌道、vector fieldを示す。つぎに、罰金水準 $F$ を引き上げた場合の長期均衡点の移動および解軌道の変化を比較する。続いて、B均衡がstable focusとなるbase case 2を設定し、同様に罰金水準の引き上げが長期均衡点の位置と収束過程に与える影響を検討する。以上の分析を通じて、罰金水準の調整が協力と非協力の共存構造をいかに変化させるかを明らかにする。

(1) Base case 1: B均衡がstable nodeとなる場合

まず、つぎのparameterを基準値とする。

$$r = 40, \quad k = 100, \quad m = 10, \quad p = 4, \quad c = 1, \quad e_1 = 3, \quad e_2 = 1.5, \quad a = 2, \quad F = 6$$

このとき、長期均衡点は

$$A = (62.5, 0), \quad B = (37.67, 0.66), \quad C = (25, 1)$$

である<sup>8</sup>。判別式 $D = 3673.28 > 0$ より、B均衡はstable nodeである。これは、解軌道が振動を伴わず単調にB均衡へ収束することを意味する。

二次元力学系(1)の解は、 $(N, x)$ 平面上を動く軌道として可視化できる。このphase plane内の解の挙動は、二次元力学系(1)に対応するvector fieldによって定まる。図1はphase planeに長期均衡点、解軌道、vector fieldを示したものである。細い実線は $x = \Phi(N)$ と $x = \Psi(N)$ である。小さい矢印でvector fieldが示されている。解軌道は、矢印を付した曲線群として表される。B均衡の周囲の解軌道が単調にB均衡へ収束する構造を示しており、上記のlocal stabilityの結果と整合的である。

つぎに、罰金水準を $F = 10$ に引き上げる。他のparameterは不変とする。このときB均衡は $B' = (47.58, 0.40)$ へ移動する(図2)。判別式 $D = 23065.33 > 0$ より、 $B'$ 均衡はstable nodeである。すなわち、罰金水準の引き上げは、長期的に共存構造を維持したまま非協力者の割合を低下させ、生物資源の存在量を増加させる効果があるといえる。

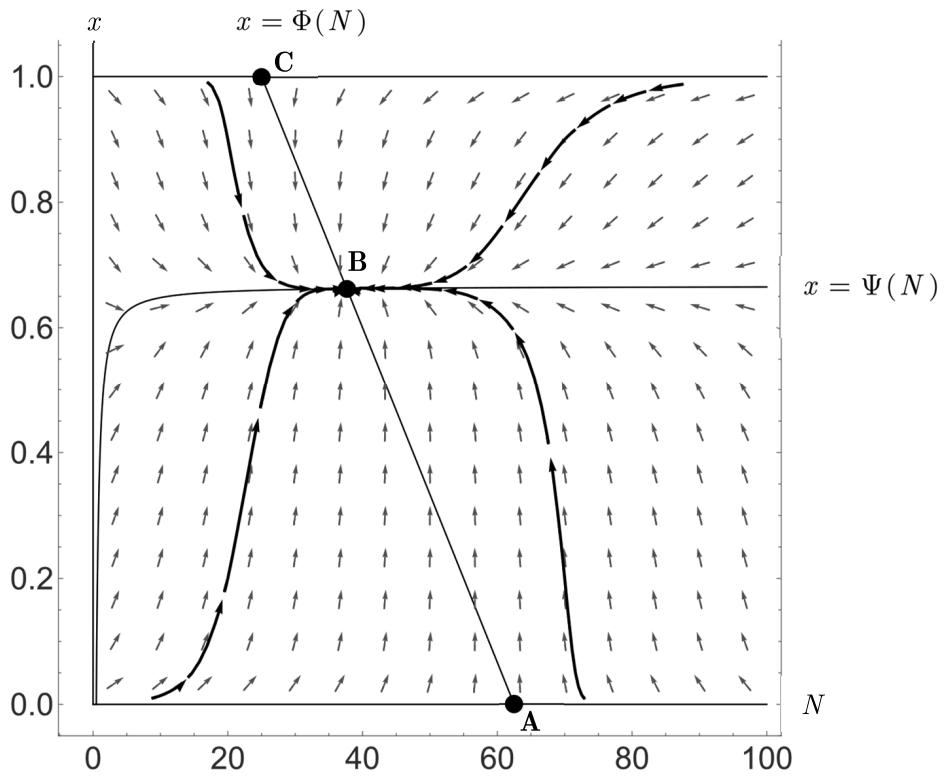


図1 長期均衡点と解軌道 (base case 1)

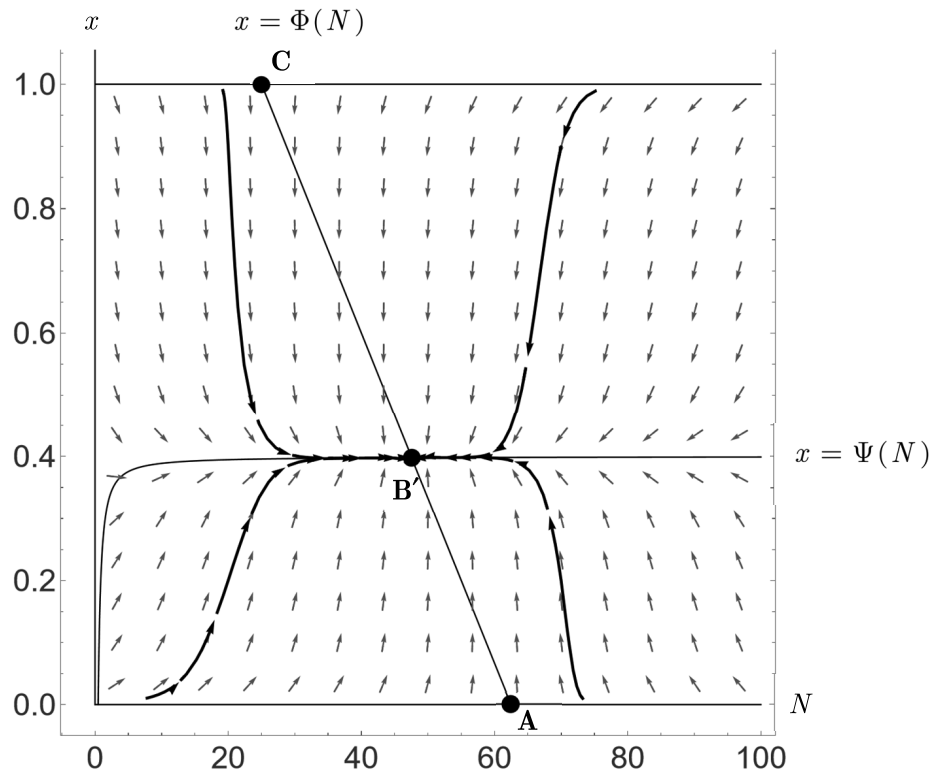


図2 罰金水準の引き上げ (base case 1)

(2) Base case 2: B均衡が stable focus となる場合

つぎのparameterを基準値とする。

$$r = 40, \quad k = 100, \quad m = 10, \quad p = 10, \quad c = 300, \quad e_1 = 3, \quad e_2 = 1.5, \quad a = 2, \quad F = 6$$

このとき、長期均衡点は

$$A = (62.5, 0), \quad B = (43.30, 0.51), \quad C = (25, 1)$$

である。判別式  $D = -338.53 < 0$  より、B均衡は stable focus である。二次元力学系(1)の解の挙動を図3で確認しよう。図3より、解軌道はB均衡の周りを反時計回りに回転しながらB均衡に収束していくことが分かる。

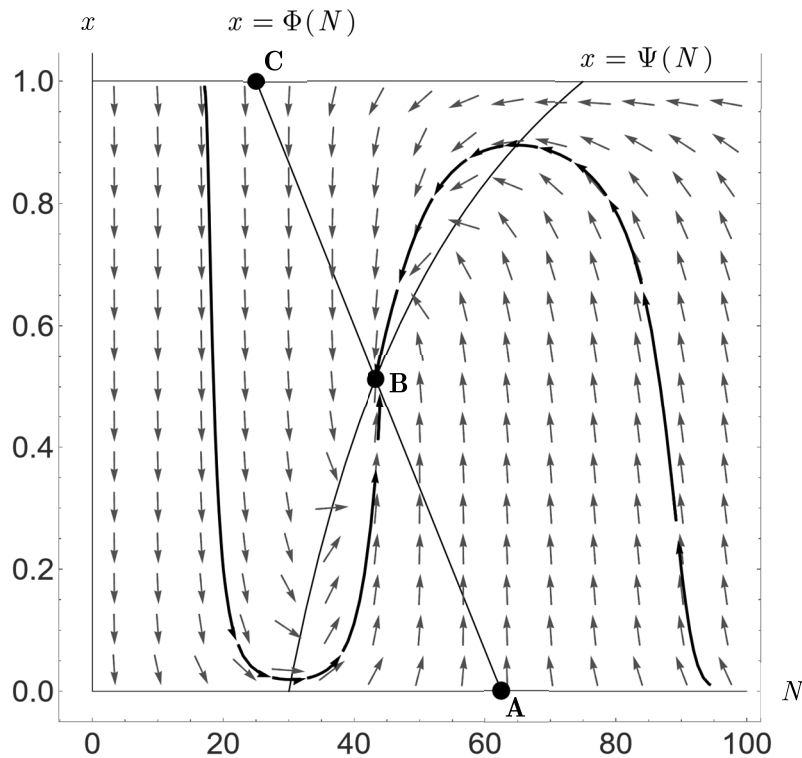


図3 長期均衡点と解軌道 (base case 2)

つぎに、罰金水準を  $F = 10$  に引き上げる。他のparameterは不変とする。このときB均衡は  $B' = (48.30, 0.38)$  へ移動する(図4)。判別式  $D = 16490.57 > 0$  より、 $B'$  均衡は stable node である。すなわち、罰金の強化は非協力者の割合を低下させると同時に、資源の存在量を増加させる方向に長期均衡点を変化させる。

さらに重要なのは、罰金水準の引き上げにより、B均衡の安定性の型が stable focus から stable node へ変化する点である。すなわち、長期均衡点への収束過程は振動的調整から単調な調整へと転換する。図4に示されるように、解軌道は回転を伴わず、直接的に  $B'$  へ収束する構造を示している。したがって、罰金水準の上昇は、共存水準のみならず、調整過程の質的構造そのものにも影響を及ぼす。以上の結果をまとめよう。

#### Result4

罰金水準の引き上げは、非協力者の割合を低下させ、資源の存在量を増加させる方向にB均衡を移動させる可能性がある。また、罰金水準はB均衡への収束経路の性質を変化させる場合がある。

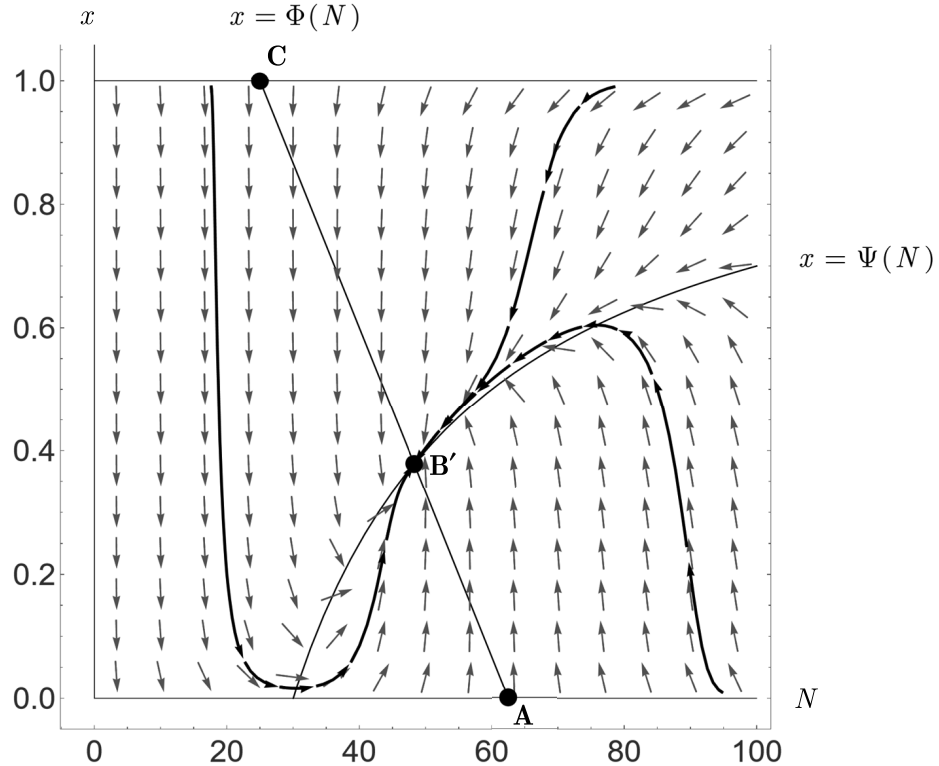


図4 罰金水準の引き上げ (base case 2)

## 6. おわりに

本稿は、生物資源の持続的利用問題を、resource-stock dynamics と replicator dynamics を結合した二次元動学体系の下で分析した。とりわけ、非協力者の割合に応じて監査確率変動する罰金制度と、資源水準に依存する規範費用を導入することにより、制度と行動進化の相互作用を明示的に組み込んだ点に本稿の特徴がある。

理論分析では、協力者と非協力者が長期的に共存する均衡（B均衡）の存在条件を導出した。さらに、local stability の分析により、B均衡が locally asymptotically stable となることを示した。また、Dulac's criterion を適用することにより、対象領域において limit cycle が存在しないことを示した。したがって、本稿の動学体系においては、B均衡が存在する場合、周期的振動は生じず、解軌道はB均衡へ収束する。

数値解析では、罰金水準  $F$  の変化がB均衡の位置および安定性の型に与える影響を

検討した。その結果、罰金水準の引き上げは、非協力者の割合を低下させ、資源の存在量を増加させる方向にB均衡を移動させる可能性があることが示された。さらに、罰金水準の変化は均衡への収束過程の質的構造にも影響を与えうる。すなわち、B均衡は stable focus から stable node へと転換する場合があります、収束過程は振動的調整から単調な調整へと変化する。この結果は、罰金制度が長期的水準のみならず、調整過程の性質そのものにも影響を及ぼすことを示唆している。

以上の分析から、罰金制度の設計は、非協力行動の抑制と資源水準の回復を同時に実現する可能性を持つことが示された。本稿の枠組みは、resource-stock dynamics と replicator dynamics の相互作用の下で、共存均衡（B均衡）の成立条件と安定性を体系的に明らかにした点に意義がある。もっとも、本稿の分析は解析的な扱いやすさを優先し、いくつかの仮定に依存している。獲得努力量は外生的に与えられ、構成員数も一定である。また、監査確率の関数形および規範費用の形状も特定の形式に限定されている。今後の課題としては、罰金制度の精緻化の検討が挙げられる。

#### 参考文献

- [1] Allen, Linda J. S. (2007), *An Introduction to Mathematical Biology*, Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ.
- [2] Biancardi, Marta, Yannis Petrohilos-Andrianos, and Giovanni Villani, (2025), "Environmental policy: The coevolution of pollution and compliance," *Mathematical Social Sciences*, Vol. 137, 102408.
- [3] Clark, Colin W. (2010), *Mathematical Bioeconomics: The Mathematics of Conservation*, Third Edition, John Wiley & Sons, Hoboken, NJ.
- [4] Conrad, Jon M. (2010), *Resource Economics*, Second Edition, Cambridge University Press, New York, NY.
- [5] Gintis, Herbert (2009), *Game Theory Evolving*, Second Edition, Princeton University Press, Princeton, NJ.
- [6] Hanley, Nick, Jason F. Shogren, and Ben White (2007), *Environmental Economics: In Theory and Practice*, Second Edition, Palgrave Macmillan, New York, NY.
- [7] Hirsch, Morris W., Stephen Smale, and Robert L. Devaney (2013), *Differential Equations, Dynamical Systems, and an Introduction to Chaos*, Third Edition, Academic Press, Waltham, MA.
- [8] Noailly, Joëlle, Jeroen C. J. M. van den Bergh, and Cees A. Withagen (2003), "Evolution of Harvesting Strategies: Replicator and Resource Dynamics," *Journal of Evolutionary Economics*, Vol. 13, No. 2, pp. 183-200.

- [9] Perman, Roger, Yue Ma, Michael Common, David Maddison, and James McGilvray (2011), *Natural Resource and Environmental Economics*, Fourth Edition, Pearson Education Limited, Harlow, Essex.
- [10] Sethi, Rajiv and E. Somanathan (1996), "The Evolution of Social Norms in Common Property Resource Use," *American Economic Review*, Vol. 86, No. 4, pp. 766-788.
- [11] Strogatz, Steven H. (1994), *Nonlinear Dynamics and Chaos: With Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering*, Westview Press, Cambridge, MA.

- 
- 1 たとえば, Clark (2010), Conrad (2010), Hanley *et al.* (2007), Perman *et al.* (2011) に概要がまとめられている。
  - 2 各時点  $t$  における存在量を  $N(t)$  と表すべきだが, 混乱が生じない限りにおいて, 簡略化のために時点  $t$  を省略する。他の変数も同様である。
  - 3 詳しくは, Clark (2010), Conrad (2010), Hanley *et al.* (2007), Perman *et al.* (2011) を参照。
  - 4 獲得努力量は各時点で生物資源の獲得のために投入される労働と資本の総称である。
  - 5 導出については Gintis (2009) を参照。
  - 6 均衡点の特徴付けについては, Allen (2007), Hirsch *et al.* (2013), Strogatz (1994) を参照。
  - 7 Dulac's criterionについてはAllen (2007), Strogatz (1994) を参照。
  - 8 計算および作図についてはMathematica (Version Number: 14.3) を用いた。また, 計算結果は近似値である。